

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediția a IX-a
Galați, 01 noiembrie 2008

Clasa a VIII-a

Problema1

1) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b \cdot x + c}{x^2 + x + 1}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

2) Să se calculeze suma:

$$\frac{1 \cdot (2 + 2)}{2^2 + 2 + 1} + \frac{3 \cdot (2^3 + 2)}{2^{2 \cdot 3} + 2^3 + 1} + \frac{3^2 \cdot (2^{3^2} + 2)}{2^{2 \cdot 3^2} + 2^{3^2} + 1} + \dots + \frac{3^n \cdot (2^{3^n} + 2)}{2^{2 \cdot 3^n} + 2^{3^n} + 1}.$$

Iuliana Duma, profesor, Galați

Problema2

Se consideră două cercuri exterioare $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$, cu

$r_1 = 4 \text{ cm}, r_2 = 2 \text{ cm}$ iar $O_1O_2 = 8 \text{ cm}$. O dreaptă d perpendiculară pe O_1O_2 intersectează segmentul $[O_1O_2]$ în punctul A astfel încât $O_1A = 4,75 \text{ cm}$.

a) Să se arate că tangentele duse din același punct M al dreptei d la cele două cercuri sunt segmente congruente.

b) Să se arate că se pot construi o infinitate de cercuri tangente ambelor cercuri $C(O_1, r_1), C(O_2, r_2)$.

c) Să se arate că dreapta determinată de punctele de tangență ale unui cerc variabil, tangent exterior ambelor cercuri $C(O_1, r_1), C(O_2, r_2)$, trece printr-un punct fix.

Iuliana și Vasile Duma, profesori, Galați

Problema3

În plan se consideră 2008 puncte distincte. Arătați că există un cerc care are în interiorul său exact 1004 puncte și în exterior 1004 puncte.

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.

Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.

Timp de lucru : 3 ore